MA1 – přednáška 4. 11. 2019

(1.) „Dodatek" k přednášce minulé (23.10.2019) – několik příkladů „výpočtu derivace funkce (i třeba doplnění počítání derivací ve cvičeních)

a) „ověření" vzorce $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (obecně pro $x>0, \alpha\in R$)

(VDSF – označení pro užití věty o derivaci složené funkce)

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' \underset{VDSF}{=} e^{\alpha\ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

b) připomenutí důležitého vzorce $(\ln(g(x)))' \underset{VDSF}{=} \frac{g'(x)}{g(x)}$ (viz 23.10.)

(pokud $g(x)>0$ a $g'(x)\in R$):

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = \frac{2x}{x^2+1}, \quad x\in R$$

c) odvození vzorce pro derivaci funkce $\operatorname{arctg} x$ (viz 23.10)
(užití „pravidla" pro výpočet derivace inverzní funkce)

d) derivace funkce $f(x)^{g(x)} \underset{def.}{=} e^{g(x)\ln f(x)}$ (viz 23.10)

a příklad $h'(x) = (x^{\sin x})'$, $x>0$ (viz 23.10)

(2.) Derivace funkce, která je složená z více než dvou funkcí
(„zobecnění" vzorce pro derivaci složené funkce)

$$(f(g(h(x))))' \underset{VDSF}{=} f'(g(h(x)))\cdot(g(h(x)))' \underset{VDSF}{=}$$

$$= f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$$

(kde výraz vpravo má „smysl", tj. existují vlastní derivace $h'(x)$, $g'(h(x))$, $f'(g(h(x)))$)

<u>Příklad</u>: $\left(\sqrt{\ln(x^2+2)}\right)' \underset{\text{VDSF}}{=} \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+2)}} \cdot \left(\ln(x^2+2)\right)' =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+2)}} \cdot \frac{1}{x^2+2} \cdot (x^2+2)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+2)}} \cdot \frac{1}{x^2+2} \cdot 2x =$$

$$= \frac{x}{(x^2+2)\sqrt{\ln(x^2+2)}}, \quad x \in R$$

(3) Při výpočtu derivace funkce se může stát, že derivaci v některém bodě z definičního oboru funkce „neumíme" počítat pomocí pravidel pro derivování a tabulky derivací základních funkcí – pak je třeba „prozkoumat", zda v těch „sporných" bodech derivace existuje (nebo ne) – – jak? Zatím máme však jen definici derivace v bodě.

<u>Příklady užití definice derivace</u> (k vyšetření derivace v „problematických" bodech)

a) $\underline{f(x) = \cos(\sqrt{x})}$: $D_f = \langle 0, +\infty)$ – dle pravidel →

$\to f'(x) = -\sin(\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ – pro $x \neq 0$!, tj. zatím $x \in (0, +\infty)$

Zbývá vyšetřit derivaci v bodě $x=0$ zprava:

$$\underline{f'_+(0)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos^2(\sqrt{x})-1}{x(\cos\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} -\underbrace{\frac{\sin^2(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos\sqrt{x}+1}}_{\to \frac{1}{2}} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

(známá limita)

Tedy, funkce $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ má v $(0,+\infty)$ oboustrannou derivaci $f'(x) = -\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$, a navíc $f'_+(0) = -\frac{1}{2}$, $\mathcal{D}f' = \langle 0, +\infty)$.

b) $\underline{f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}}$: $\mathcal{D}f = \langle 0, +\infty)$, analogicky k (a):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pro } x \in (0, +\infty),$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{\underbrace{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}_{\to 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \text{„} 1 \cdot \frac{1}{0+} \text{"}$$

$$= +\infty,$$

funkce $\sqrt{\operatorname{arctg} x} = f(x)$ nemá v bodě 0 zprava derivaci vlastní, ale $f'_+(0) = +\infty$, tj. $\mathcal{D}f' = (0, +\infty)$

c) (trochu „těžší" příklad) $\underline{f(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)}}$, $\mathcal{D}f = R$

$$f'(x) \underset{\text{VDSF}}{=} \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+1)}} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{\ln(x^2+1)}} \quad \underline{\text{pro } x \neq 0} \; !$$

<u>Vyšetření derivace funkce f v bodě $x=0$:</u>

$$f'_{\pm}(0) \underset{\text{def.}}{=} \lim_{x\to 0\pm} \frac{\sqrt{\ln(x^2+1)}}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \sqrt{\underbrace{\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}}_{\to 1}} \cdot \operatorname{sgn} x = \pm 1,$$

(lze vyjádřit $x = \sqrt{x^2} \cdot \operatorname{sgn} x$ (stačí pro $x \neq 0$) ; $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1$)

Tedy daná funkce v bodě $x=0$ derivaci oboustrannou nemá, tj. $\mathcal{D}f' = R \setminus \{0\}$.

d) (i) $\underline{f(x) = |\ln x|} = \begin{cases} \ln x & \text{pro } x \geq 1 \\ -\ln x & \text{pro } 0 < x < 1 \end{cases}$

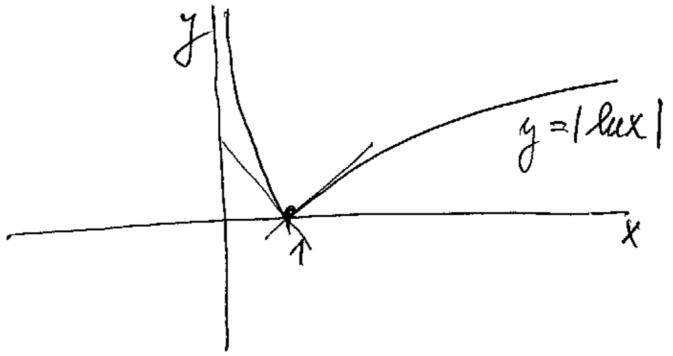
Pak $f'(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in (1, +\infty)$ (v tabulce „derivací" jsou oboustranné derivace)

$f'(x) = -\frac{1}{x}$ pro $x \in (0,1)$

a $f'_{\pm}(1) = \lim\limits_{x \to 1\pm} \frac{|\ln x|}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1\pm} \frac{\ln x \cdot \operatorname{sgn}(\ln x)}{x-1} = \pm 1,$

tedy fce $f(x) = |\ln x|$ nemá v bodě $x=1$ oboustrannou derivaci (jen jednostranné)

Náčrtek grafu („jasné")



<u>Zkuste sami (ii) $g(x) = |\ln^3 x|$.</u>

e) <u>$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$</u>

f je definována v $\mathbb{R}$, je spojitá (zřejmé) v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (VOS), tedy f je spojitá i v bodě 0,

pro $x \neq 0$ počítáme derivaci dle pravidel (součin, VDSF).:

$$f'(x) = \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0$$

a $f'(0)$? – opět užitím definice derivace

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(užitím VOS)

Tedy, dle definice derivace můžeme takto „dopočítávat" derivaci i v bodě $x=0$.

f) derivace funkce arcsin x

pro $x \in (-1,1)$ v tabulce je $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ –

– odvozené jako příklad využití derivace inverzní funkce:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

($\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}$ neboť $\cos(y)$ je kladný v $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, a zde, pro $x \in (-1,1)$ je $\arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$)

pro $x = 1-$ (analog. pro $x = -1+$):

$$(\arcsin x)'_{x=1-} \underset{\text{def.}}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{x-1} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-} \frac{1}{\frac{\sin y - \sin\frac{\pi}{2}}{y-\frac{\pi}{2}}} =$$

($\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \sin y$)
pro $x \to 1-$ je $y \to \frac{\pi}{2}-$

$$= „\frac{1}{0^+}" = \underline{+\infty}$$

(neboť $\lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y - \sin\frac{\pi}{2}}{y-\frac{\pi}{2}} = (\sin y)'_{y=\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, a $\frac{\sin y - \sin\frac{\pi}{2}}{y-\frac{\pi}{2}} > 0$ pro $y \to \frac{\pi}{2}-$)

4. Derivace funkce vyšších řádů. (viz přednáška 23.10.)

Definice: Nechť ex. $f'(x) \in R$ v $U(x_0)$. Existuje-li

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

, pak tuto limitu nazýváme druhou derivací (derivací druhého řádu) funkce f v bodě x_0 a značíme $f''(x_0)$ $\left(= \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \text{ - aplikace}\right)$

Definice n-té derivace funkce v bodě x_0 (označujeme $f^{(n)}(x_0)$)

Nechť ex. $f^{(n-1)}(x)$ v $U(x_0)$; ex-li $\left(f^{(n-1)}(x)\right)'_{x=x_0}$, říkáme, že fce f má v bodě x_0 derivaci n-tého řádu (n-tou derivaci) a značíme tuto derivaci $f^{(n)}(x_0)$

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'_{x=x_0} \quad \text{(definice indukcí)}$$

Příklady:

1) $(e^x)^{(n)} = e^x, \; x \in R$ (23.10.)

2) $(\ln x)'' = \left((\ln x)'\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \; x \in (0, +\infty)$

$(\ln x)''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = (-1)(-2) \cdot x^{-3}, \; x \in (0, +\infty)$

odtud: $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}, \; x \in (0, +\infty)$

3) $(\operatorname{arctg} x)'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{1+x^2}, \; x \in R$

4) $(\sin x)''' = (\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x, \; x \in R$

(5) Bylo slíbeno několik „lehčích" důkazů
(jako ukázka toho, že rozumíme-li definicím, pak i důkazy můžeme pochopit):

1) Věta: Nechť existují vlastní $f'(x)$, $g'(x)$, pak existuje i
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Důkaz: dle definice derivace:
$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \underset{\text{dle definice } f'(x) \text{ a } g'(x)}{=}$$
$$= f'(x) + g'(x)$$ (což jsme měli ukázat)

2) Věta: Nechť ex. (vlastní) $f'(a)$, $g'(a)$, pak také existuje derivace součinu $(f\cdot g)$ v bodě a a platí
$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a).g'(a).$$

Důkaz: Máme „vyjádřit" limitu pro výraz $(f.g)'(a)$, tj.
$$(*)\quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a).g(a)}{x-a},$$ přičemž máme „k použití" $f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $g'(a) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$;

tyto limity se pak mají „uvést" v limitě (*) a pomocí nich limitu (*) určit (toto je „princip" důkazu našeho tvrzení).

A jak toto udělat? (budeme limitit jen jednu z funkcí f, g)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)\cdot g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \Big(\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to ?} + f(a)\underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)} \Big) \overset{*}{=}$$

K výpočtu limity bychom nemohli použít pravidla pro výpočet limit (aritmetiku) – jediné, co „chybí", je, že $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ pro důkaz vzorce, tj. že funkce g je spojitá v bodě a.
A to je ještě začátek poslední části přednášky – aplikace derivace funkce v bodě. Dokážeme si (jako další ukázku důkazů), že platí:

<u>Věta</u>: Nechť f má v bodě <u>a</u> vlastní $f'(a)$. Pak je funkce f v bodě <u>a</u> spojitá.
(Analogicky věta platí pro $f'_+(a)$ a spojitost v $a+$, ($f'_-(a)$ a spojitost f v bodě $a-$))

Pak ještě snadno dokážeme (použití aritmetiky limit), že

$$\overset{*}{\underset{AL}{=}} \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} g(x) + f(a)\cdot \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} =$$

$$= \underline{f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)}$$

(což jsme měli dokázat)

„Hezké" jsou i důkazy věty o derivaci složené funkce a funkce inverzní – pokud bude čas, ukážeme si (napíšu v příští přednášce)

A nyní poslední část přednášky:

⑥ Užití derivace funkce v bodě:

1. V důkazu vzorce pro derivování součinu funkcí jsme užili důležitý důsledek existence vlastní derivace funkce. Zde je důkaz tohoto tvrzení:

1) Chceme-li dokázat, že funkce f je spojitá v bodě a, máme ukázat, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

2) Z předpokladu víme, že existuje $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in R$.

Jak předpoklad v důkazu 1) využijeme?

$$\lim_{x\to a}\bigl(f(x)-f(a)\bigr) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a) \underset{2)+AL\ (\text{vlastní limity})}{=}$$

(jsme v $P(a)$, tj. $x-a\neq 0$)

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a) = f'(a).0 = 0$$

(zde jsme pro „aritmetiku" limit potřebovali, aby $f'(a)\in R$!)

Poznámka: 1) Věta nelze „obrátit", tj. neplatí

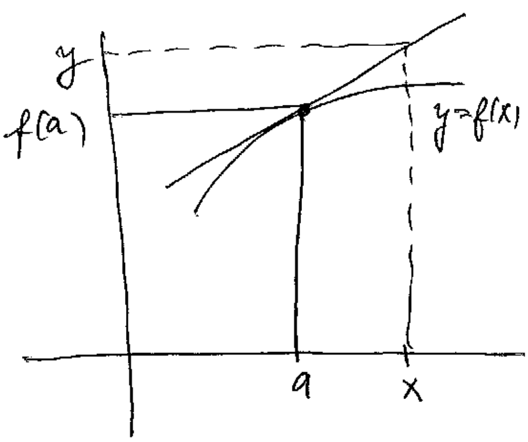
f je spojitá v bodě a $\Rightarrow$ ex. $f'(a)$

Příklad: $f(x)=|x|$ je spojitá v bodě $a=0$, ale nemá v bodě $a=0$ derivaci

2) Také neplatí věta, když nepředpokládáme $f'(a)$ vlastní (příklad : $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $f'(0)=+\infty$, ale sgn není spojitá v $a=0$)
Ale i pro $f'(a)=+\infty$ fce může být spojitá v bodě a
(příklad $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $a=0$)

2. tečna ke grafu funkce $y=f(x)$ v bodě $[a,f(a)]$

Je dána funkce $y=f(x)$, definovaná v okolí $U(a)$, a nechť ex. $f'(a)\in\mathbb{R}$. Připomeneme si geometrický význam derivace funkce v bodě – směrnice „tečny" ke grafu fce $y=f(x)$ v bodě $[a,f(a)]$ (přesně je tečna ke grafu fce f definována jako přímka, jdoucí bodem $[a,f(a)]$ se směrnicí $f'(a)$)



pak bod $[x,y]$ je bodem této tečny, když bude platit

$$\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a) \quad (= k_{\text{tečny}})$$

tj. dostaneme následující rovnici tečny ke grafu fce f v bodě $[a,f(a)]$:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a), \quad x\in\mathbb{R}$$

Příklady: 1) $f(x)=x^2,\ a\in\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=2x,\ f'(a)=2a$

tečna v bodě $[a,a^2]$: $\quad y = a^2 + 2a(x-a)$

$(\text{tj. } y = 2ax - a^2)$

2) $f(x)=\sin x$ v bodě $[0,0]$ má tečnu: $y=x$

$(f'(0)=\cos 0 = 1)$

$f(x)=\arcsin x$ v bodě $[0,0]$ má tečnu: $y=x$

$\left(f'(0)=(\arcsin x)'_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1 \right)$

stejná tečna ke grafu fce $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{arctg} x$ v bodě $[0,0]$ je přímka $y=x$

3) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a=0$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$ a $f(0)=1$ $\Big\} \Rightarrow$ rovnice tečny ke grafu f v bodě $[0,1]$ je $y = 1 + \frac{1}{2}x$

4) $f(x) = e^x$, $a=0$

$f(0)=1$, $f'(0)=1$, tedy rovnice tečny ke grafu exponenciely v bodě $[0,1]$ je $y = 1+x$

5) $f(x) = \ln x$, $a=1$

$f(1)=0$, $f'(1)=1$ rovnice tečny v bodě $[1,0]$:

$y = x-1$

$(y = 0 + 1\cdot(x-1))$

3. Lineární aproximace funkce f v okolí bodu a, kde ex. $f'(a)\in R$:

v okolí $U(a)$ bodu a, kde ex. $f'(a)\in R$ (tj. f je definována v „nějakém" okolí bodu a) můžeme hodnoty fce f „nahradit" s nějakou chybou hodnotami lineární funkce, jejíž graf je tečna ke grafu fce $f(x)$ v bodě $[a,f(a)]$ (lineární fce je ta „nejjednodušší" mezi funkcemi, a pokud její graf je tečna ke grafu v $[a,f(a)]$, asi se nebude „moc" lišit od hodnot fce f, pokud budeme v „malém" okolí bodu a.

<u>Tedy</u>: 1) ex.-li $f'(a)$, pak funkci

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

nazýváme lineární aproximací funkce f v okolí bodu $\underline{a}$.

2) $\underline{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \omega(x-a) \quad , \; \omega(x-a) \text{ je „malá"?}}$

($\omega(x-a)$ – chyba aproximace)

a) $\underline{\lim_{x\to a} \omega(x-a)} = \lim_{x\to a} f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a)\right) =$

$= \lim_{x\to a} \left(f(x) - f(a)\right) - f'(a)(x-a)) = \underline{0}$

(spojitost v bodě a ... $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$)

ale navíc, i

$$\underline{\lim_{x\to a} \frac{\omega(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right) = 0},$$

což, protože se jedná o limitu „$\frac{0}{0}$" znamená, že čitatel, tj. chyba $\omega(x-a)$ je „řádově" menší než $(x-a)$, což je pro aproximaci to důležité!

<u>Pokus</u>: $\underline{e^x \cong 1 + x \quad \text{v okolí bodu } a = 0}$

„u nás" tedy: $e^{0,01} \doteq 1,01$ – kalkulačka $1,0100501\ldots$

$e^{0,001} \doteq 1,001$ —"— $1,0010005001\ldots$

ale $e^{0,1} \doteq 1,01$ kalkulačka $1,1051$

a „u nás" $e^1 = 2$ —"— $2,7182\ldots$

(jsme už „daleko" od bodu $a=0$)
chyba „velká"